INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

SESSION 1 9 8 6 — EPREUVE DE M A T H E M A T I Q U E S

T est un réel strictement positif. E est l'ensemble des applications de l'intervalle fermé $[0, T]$ dans $[0, 1]$ vérifiant les 4 propriétés suivantes :

(1) f admet une dérivée seconde continue en tout point de l'intervalle $[0, T]$ différent de $\frac{T}{2}$. De plus $f''(0) > 0$, $f''(T) < 0$ et $|f''|$ est bornée sur l'ensemble $[0, \frac{T}{2}[\cup]\frac{T}{2}, T]$.

(2) f' est positive ou nulle et continue sur $[0, T]$.

(3) $f'(0) = f'(T) = 0$.

(4) $f(0) = 0$ et $f(T) = 1$.

Pour tout élément f de E, M(f) désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par $|f''(t)|$ pour t appartenant à $[0, \frac{T}{2}[\cup]\frac{T}{2}, T]$.

Enfin, la fonction u est définie par $u(t) = |f'(t)f''(t)|$ si $t \neq \frac{T}{2}$ et $u(\frac{T}{2}) = 0$. On pose $d(f) = \int_0^T u(t)dt$.

I - 1) a, b, c désignant 3 réels, on pose $\phi(X) = aX^5 + bX^3 + cX$ et, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $f(t) = \frac{1}{2} + \phi(t - \frac{T}{2})$. Déterminer a, b, c pour que f vérifie les propriétés (3) et (4) et que $f''(0) = \frac{4}{T^2}$ (a, b, c seront exprimés à l'aide de T).

L'application f correspondante est-elle élément de E ? Exprimer M(f) et d(f) en fonction de T.

2) On suppose pour cette question T = 2 et on représente f par une courbe Γ dans un repère orthonormé (on prendra 10 cm comme unité sur chacun des axes). Donner sur le même graphique la représentation de f' et de f''.

Préciser les coordonnées du centre de courbure à Γ aux points $t = 0$ et $t = \frac{T}{4} = \frac{1}{2}$.

II - 1) A tout élément f de E, on fait correspondre g, tel que, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $g(t) = 1 - f(T-t)$. Montrer qu'on définit ainsi une bijection de E. On pose $w = \frac{1}{2}(f+g)$. Vérifier que w est élément de E et comparer M(w) à M(f).

2) h est une application dérivable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$. h' est continue sur l'intervalle et $h(0) = h'(0) = 0$. La dérivée h'' existe et est continue en tout t différent de $\frac{T}{2}$. Prouver que :

$$\sup_{t \neq \frac{T}{2} \; ; \; t \in [0, T]} |h''(t)| < \frac{4}{T^2} \text{ nécessite } h(\tfrac{T}{2}) < \frac{1}{2}$$

En déduire que, pour tout f appartenant à E, $M(f) \geqslant \frac{4}{T^2}$.

3) Montrer qu'il existe un élément φ de E tel que :
si $0 \leqslant t < \frac{T}{2}$ alors $\varphi''(t) = \frac{4}{T^2}$ et si $\frac{T}{2} < t \leqslant T$ alors $\varphi''(t) = -\frac{4}{T^2}$. En déduire la borne inférieure J de l'ensemble des valeurs prises par M(f) quand f est élément de E.

T.S.V.P.

4) Soit $g \in E$ tel que $M(g) = J$. Montrer que, s'il existe $t_o \in [0, \frac{T}{2}[$, tel que $g''(t_o) < J$, alors que $g(\frac{T}{2}) < \frac{1}{2}$. En déduire l'ensemble des éléments f de E tels que $M(f) = J$.

III - Dans cette partie T peut prendre des valeurs diverses. On veut appliquer le résultat précédent à un modèle simple de rendez-vous spatial à commande bornée : un mobile décrit le segment [0, 1] d'un axe pendant l'intervalle de temps [0, T]. Son abscisse f(t) à l'instant t est telle que f est élément de l'ensemble E défini à partir de T. De plus il existe un réel K, strictement positif, tel que $M(f) \leqslant K$. Enfin, on estime que la consommation en énergie pour la réalisation d'un rendez-vous varie dans le même sens que l'intégrale d(f).

1) K étant fixé, déterminer la durée minimale T_o des mouvements qui vérifient ces conditions. Indiquer la loi horaire $f_o(t)$ d'un mouvement dont la durée est $T = T_o$.

2) On se propose de déterminer un réel α tel que $0 < \alpha \leqslant \frac{T}{2}$, que $f_1 \in E$ et que : si $0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} - \alpha$, $f_1''(t) = K$.

si $\frac{T}{2} - \alpha < t < \frac{T}{2} + \alpha$, $f_1''(t) = -\frac{K}{\alpha}(t - \frac{T}{2})$.

si $\frac{T}{2} + \alpha \leqslant t \leqslant T$, $f_1''(t) = -K$.

Pour quelles valeurs de T le problème admet-il une solution ? Préciser alors l'expression de α en fonction de K et de T et celle de $f_1(t)$ sur chacun des 3 intervalles en précisant $f_1(\frac{T}{2} - \alpha)$, $f_1(\frac{T}{2})$ et $f_1(\frac{T}{2} + \alpha)$.

3) Calculer l'intégrale $d(f_1)$ pour la fonction qui vient d'être trouvée. K étant fixé, pour quelle valeur T_1 de T l'intégrale $d(f_1)$ est-elle minimale ? Calculer la valeur du minimum $m = \int_0^{T_1} |f_1'(t)\, f_1''(t)|dt$, obtenu en remplaçant T par T_1 dans la définition de f_1''. (m sera exprimé à l'aide de K).

Comparer T_1 et m respectivement à T_o et $d(f_o)$ correspondant à la solution du III - 1). Comparer m à la valeur de d(f) obtenue en remplaçant T par T_1 pour la solution du I - 1).

4) E étant défini à partir de la valeur de T égale à T_1, quel est le minimum K_1 de M(f) pour $f \in E$? Calculer $d(\varphi_1)$ pour $\varphi_1 \in E$ et $M(\varphi_1) = K_1$ et le comparer à m. Que peut-on en conclure ?

IV - On considère de nouveau un réel T strictement positif et fixé.

F désigne l'ensemble des applications f appartenant à E et qui vérifient en outre les propriétés :

(5) f'' est décroissante sur $[0, \frac{T}{2}]$ et $f''(\frac{T}{2}) = 0$.

(6) pour tout t compris entre 0 et T, $f(t) = 1 - f(T - t)$.

1) Prouver que, pour tout f appartenant à F, $f'(\frac{T}{2}) > \frac{1}{T}$.

2) ε est un réel strictement positif. Montrer que, pour certaines valeurs de ε qu'on précisera, il est possible de déterminer un réel ß strictement compris entre 0 et $\frac{T}{2}$, tel qu'il existe une application f_2 appartenant à F et vérifiant :

pour $0 \leqslant t \leqslant ß$ $\quad f_2'(t) = (\frac{1}{T} + \varepsilon) \sin(\frac{\pi t}{2ß})$.

pour $ß < t \leqslant \frac{T}{2}$ $\quad f_2'(t) = \frac{1}{T} + \varepsilon$.

Exprimer alors $f_2''(0)$ en fonction de ε et de T. Quelle est la limite de $f_2''(0)$ quand, T étant fixé, ε tend vers 0 ?

3) Déterminer la borne inférieure de l'ensemble des valeurs prises par d(f) lorsque f est élément de F. Existe-t-il un élément de F permettant de l'atteindre ?